

確保理論再考

—ロープの弾性と器具との摩擦を考慮した確保理論—

北村 憲彦 (愛知県山岳連盟 (春日井山岳会))

1. はじめに

Arnold Wexler(1950年)はエネルギー法を用いて解析し、落下率 H/L や制動率 s/L によって弾性確保と制動確保の意義を示した¹⁾。導出された近似式は簡便なため、リスクの程度を判断するなどに活用されている^{2),3)}。その後、ロープや確保器具の進歩や登攀スタイルの変化は著しく、確保技術も大きな影響を受けた。現在では、各確保技術の限界や有効性を判定し、場面に適した技術を選択すべきと考えられる。そこでロードセルを用いた実測とともに、より実際的な確保理論によって状況を的確に予測できれば便利である。次の節でロープ係数 K が一定でないことを示すが、今回は簡単のために K 一定、摩擦係数 μ も一定としてWexlerと同様のエネルギー法によって基礎理論を見直した。

2. ロープ係数 K

ランニングビレイ支点やアンカー支点など、各支点到に区間1, 区間2, ...と名前を付ける。ある区間 i の距離を L_i [m], その区間でのロープの自然長(張力なしの長さ)を $L_{i,0}$ [m]とする。そのロープに張力 T_i [kgf]が作用するとき、伸び x_i [m]ならば、伸び率 $\varepsilon = x_i/L_{i,0}$ (100倍すれば、伸び率[%])になる。その時にロープ内部に生じる圧力に相当する単位面積当たりの引張力を σ [kgf/m²]とすれば、引張応力 $\sigma = E\varepsilon$ 。ここで E [kgf/m²]はロープの縦弾性係数。ロープの断面積を A [m²]とすると、 $T_i = A\sigma = AE\varepsilon = AE x_i/L_{i,0}$ である。一方簡単のためにロープがばねのように伸びは張力に正比例すると考えれば、ばね定数 K を用いて、 $T_i = kx_i$ になるので、 $k = AE/L_{i,0}$ になる。ロープ長さ $L_{i,0}$ は場合によって変化する。そのたびにばね定数 k を変えては不便なので、ロープの

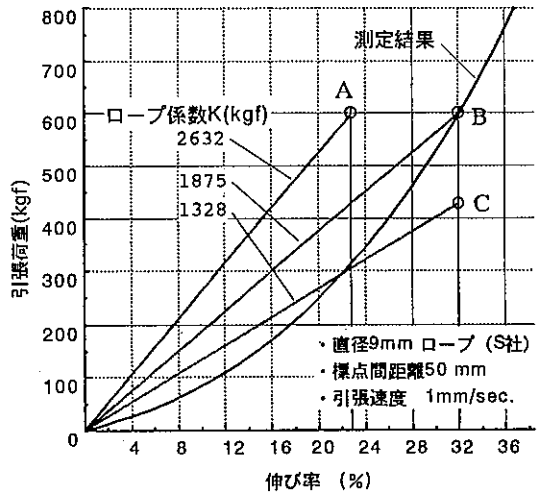


図1 登山用ロープの引張試験

全長500mmの短いロープの中央部分に張力のかからない初期長さ50mm部分の伸びと張力を測定した。張力を受けて伸びにつれて次第にロープは硬くなり伸びにくくなる性質がある。適当なロープ係数を決めることが課題である。

直径と材質から決まる AE の部分 $AE=K$ とおき、習慣としてロープ係数 K [kgf]としている。図1はロープの引張試験の一例である。直径9mmの登山用ロープを1mm/sec.でゆっくり引張り、伸びと引

3. 論文等

張荷重の関係を調べた。市販のφ9mm×50mロープから長さ500mmのサンプルを数本採取し、そのさらに中央に50.0mmの標点間距離を設定して両端に引張荷重を負荷した。ロープの伸びに引張荷重は比例せず、引張荷重が大きいほど伸びにくくなる。

仮に600kgfという大きな張力が生じた場合について考える。32%伸びに対して600kgfというB点とグラフの原点Oと結ぶ直線の傾きをKとすれば1875kgfになる。実際には曲線でB点までを結んで囲まれる面積にロープの弾性エネルギーが対応する。直線OBで作られる三角形の面積はそれより大きいので、弾性エネルギーを多く見積もりすぎることになる。実際の弾性エネルギーと等しい三角形は頂点をA点と頂点をC点の2種類が考えられる。支点、墜落者および確保者へのダメージを推定したいので、張力を合わせるAではロープの伸びが実際より短い。Bでは張力の見積もりが甘い。適当に近似して、曲線を表現して伸びと張力の関係をとるべきである。そのためには実用のロープについて引張特性値を測定して、共通する表現を抽出する必要がある。その際、実際の墜落速度も気になる。このグラフから強引に補完できるが、必ずしも普遍的とはいえない。今回はひとまず従来同様にK一定として扱うことで従来の延長線上で議論を進めたい。

3. セカンドが落下率1.0で墜落する場合

墜落の時に、繰り出されたロープ長が増加することは、墜落を受け止めるクッションの厚みを増すようなものである。落下高さHと繰り出されたロープ長さLの比H/Lは落下率で、墜落のリスクを判断するために有効である。固定確保における落下率とそのときにロープに発生する張力との関係を図2に示す。図中のラインはK=一定で、カラビナとロープの間の摩擦はないものとした。

次に、「セカンドが落下率1.0で墜落する場合」を以下のような場面に設定してみる。重量60kgf

(=体重+身に付けているもの)のセカンドが上で確保者のテラスに着いた。そのときロープが4mたるんでおり、バランスを崩したセカンドはテラスから墜落、ロープに張力がかからない状態で彼は4m墜落した。テラスの確保者は木綿の軍手をして牛蒡を引き抜くようにロープを握りしめブレーキをかけたとする。握力が50kgfで手袋とロープとの間の摩擦係数が0.2なら50kgf×0.2=10kgfしかブレーキはかけられない。これでは重量60kgfの墜落者がたとえ静かにぶら下がったとしても止められない。とにかくそばにいた4人の両手で80kgfでロープを同時に掴んだとする。ロープ係数K=1000kgfなら図2固定確保で最大張力411kgfになるから、止められずロープは流出する。それでも確保者

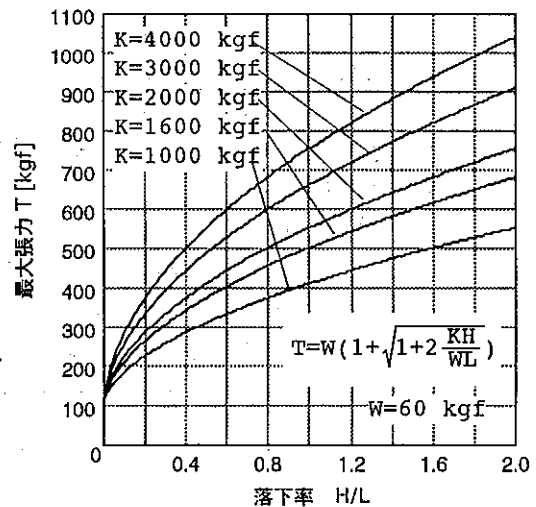


図2 固定確保における落下率と最大張力
(墜落者重量60kgf, Kはロープ係数)

私たちは頑張って $T=80\text{kgf}$ という張力を維持したとする。墜落者が停止するまでに流出したロープの自然長(張力のかかっていない状態の長さ)を S_0 とするなら、流出した長さも張力によって伸びて $S_0(1+T/K)$ になるので、摩擦仕事は $TS_0(1+T_2/K)$ [kgfm]と表される。また、墜落する高さは $H+S_0+T(L_0+S_0)/K$ になる。Wexlerはロープの弾性も初期の L_0 だけとして扱ったが、流出した S_0 にも生じるので、弾性仕事は $T^2(L_0+S_0)/(2K)$ である。以上のエネルギー収支は、次のようになる。

$$W(H+S_0+T(L_0+S_0)/K)=T^2(L_0+S_0)/(2K)+TS_0(1+T/K) \quad (1)$$

式(1)はWexlerの式に S_0 の部分の弾性仕事を追加し、流出ロープ長さを自然長で表し実測を容易したものである。図3に模式的に実際の制動状態を示す。流出するロープの長さによってロープの伸びが増えて、エネルギーを多めに吸収する。

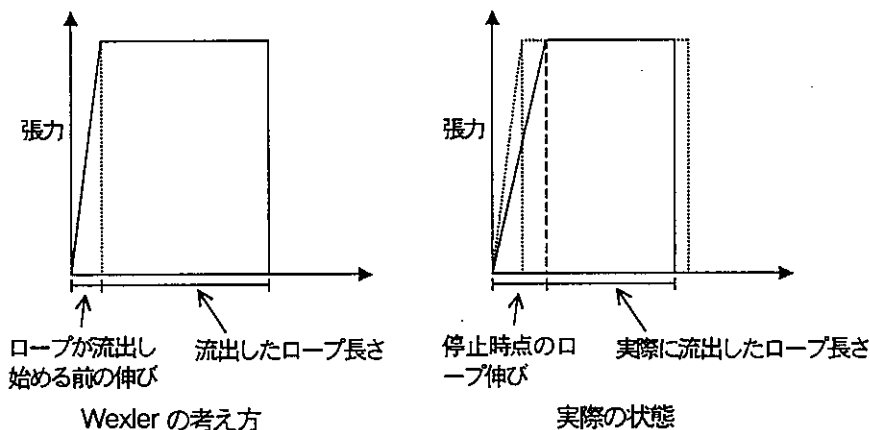
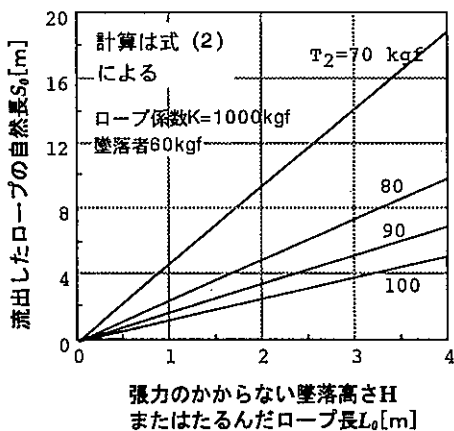


図3 セカンドが墜落したときに手元の摩擦以上の張力が発生して、手元からロープが流失した場合

さて、式(1)を変形して、停止するまでに流出した自然長 S_0 を次の式(2)から求める。

$$S_0 = (WH + (L_0 T/K)(W - T/2)) / (T - W)(1 + T/K) + T^2 / (2K) \quad (2)$$

図4に示すように上記の例では $S_0=10\text{m}$ 位になり、結構シリアスである。



60kgfのセカンドが確保者と同じ高さから墜落した。セカンドと確保者とのロープは墜落高さ分たるんでいて(つまり落下率1.0)、間にカラビナなどの中間支点はないとする。4人で握って80kgfの張力で支えても、2mたるんでいても止まるまでに流出するロープは自然長で5mにもなり、4mたるんでいけば10m余分に流失する。)

図4 ブレーキの張力によるロープ流出長さの違い

4. エネルギー計算の考え方

カラビナとロープの間の摩擦は実際には無視できない。そこで、支点到掛っているカラビナを境に区間を分割する。たとえば、墜落者とランニングビレー支点1との間を区間1、支点1と支点2の間を区間2とする。各区間の間においてロープはカラビナを通過している。もし区間1で墜落して張力 T_1 が発生したら、支点1にあるカラビナを通過してロープとカラビナとの摩擦の分だけ張力が減じて T_2 になる。カラビナとロープとの間のトータル摩擦力 $F=T_1-T_2$ で、また張力 T_1 と張力 T_2 の関係はオイラーの式で表され、次式(3)になる。ただし、巻き付け角度は θ_1 [rad]とする。

$$T_2 = T_1 e^{-\mu \theta_1} \quad \text{または} \quad T_1 = T_2 e^{\mu \theta_1} \quad (3)$$

墜落後通常は θ_1 は一定であるから、張力 T_2 は墜落者がロープを引張る力 T_1 に比例して大きくなる。

このように区間ごとに張力は異なり、またカラビナに巻き付けた部分では巻き付け角度位置によって張力、滑り距離、その部分の単位面積当たりの摩擦係数、および巻き付き部分の弾性伸び量も変化(分布)している。それらは、墜落の張力が0から次第に増加してある張力になるまで、ともに増加していく。それらが消費するエネルギー合計が墜落者が実際に墜落する高さのもつエネルギーと等しいと考えることにする。

4.1 各区間での弾性エネルギー

区間2において、ある瞬間の T_2 に対する伸びを x_2 とすると、伸びは自然長 $L_{2,0}$ に対して T_2 の張力に応じて生じるので、

$$x_2 = \frac{L_{2,0} T_2}{K} \quad (4)$$

と表される。ところで区間の支点間距離は $L_2 = \text{一定}$ で、 $L_{2,0}$ は張力 $L_{2,0}$ で伸びた結果 L_2 になる自然長とすると、

$$L_2 = L_{2,0} \left(1 + \frac{T_2}{K}\right), \quad \therefore L_{2,0} = \frac{L_2 K}{K + T_2} \quad (5)$$

区間2ではこのロープ長 $L_{2,0}$ が弾性エネルギーを蓄える。 x_2 を既知の条件 L_2, K と張力 T_2 で表すと

$$x_2 = \frac{L_2 T_2}{K + T_2} \quad (6)$$

これを両辺微分しておいて、

$$dx_2 = \frac{L_2 (K + T_2) - L_2 T_2}{(K + T_2)^2} dT_2 = \frac{L_2 K}{(K + T_2)^2} dT_2 \quad (7)$$

区間2で蓄える弾性エネルギーは $\int T_2 dx_2$ になるので、式(7)を用いて T_2 の積分にしてやる。

$$\int T_2 dx_2 = \int_0^{T_2} T_2 \frac{L_2 K}{(K + T_2)^2} dT_2 = L_2 K \left(-\frac{T_2}{K + T_2} + \log \left| \frac{K + T_2}{K} \right| \right) \quad (8)$$

なお、カラビナに巻き付く量は高々20mmなので、そこで蓄えられる弾性エネルギーはたぶん無視できるであろう。

さて、区間2で伸びた分はカラビナに巻き付いてから区間1へ流出する。先程と同様にカラビナに巻き付く分は無視できるくらい小さいと考えれば、区間2からの流出分は区間1で新たに張力 T_1 によってさらに伸ばされることになる。区間2からの流出分(自然長で考える)は $L_2 - L_{2,0}$ (= x_2)なので、 $L_2 - L_{2,0} = L_2 T_2 / (K + T_2)$ 。この長さに相当する自然長分が T_1 を受けて区間1で $\Delta x_{2,1}$ だけ伸びるとする。

$$\Delta x_{2,1} = x_2 \frac{T_1}{K} = (L_2 - L_{2,0}) \frac{T_1}{K} = L_2 \left(1 - \frac{K}{K + C_1 T_1}\right) \frac{T_1}{K} \quad (9)$$

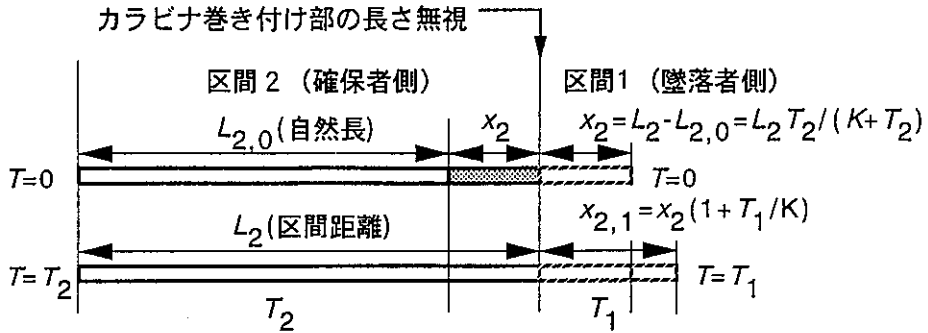


図5 各区間でのロープの伸び

ただし式(3)の関係より、 $C_1 = \frac{T_2}{T_1} = e^{-\mu \theta_1}$ とおく。

区間1における自然長 x_2 の蓄える弾性エネルギーは $\int T_1 d(\Delta x_{2,1})$ であるから、

$$\begin{aligned} d(\Delta x_{2,1}) &= \frac{L_2}{K} \left(1 - \frac{K^2}{(K + C_1 T_1)^2}\right) dT_1 \\ \int T_1 d(\Delta x_{2,1}) &= \frac{L_2}{K} \int_0^{T_1} T_1 \left(1 - \frac{K^2}{(K + C_1 T_1)^2}\right) dT_1 \\ &= \frac{L_2}{2K} T_1^2 + \frac{L_2 K T_1}{C_1 (K + C_1 T_1)} - \frac{L_2 K}{C_1^2} \log \left| \frac{K + C_1 T_1}{K} \right| \end{aligned} \quad (10)$$

もし区間1と区間2の間の支点1の摩擦がないなら、 $C_1 = 1$ 、 $T_1 = T_2$ になる。 $T_1 = T_2 = T$ として、式(8)、(10)を合計すれば、

$$L_2 K \left(-\frac{T}{K+T} + \log \left| \frac{K+T}{K} \right| \right) + \frac{L_2}{2K} T^2 + \frac{L_2 K T}{(K+T)} - L_2 K \log \left| \frac{K+T}{K} \right| = \frac{L_2}{2K} T^2 \quad (11)$$

また制動確保をして、手元から自然長 S_0 のロープが流入してきたら、途中の区間ではたるまないように各張力を受けて伝達され、結局は墜落者の区間1にやって来て、 T_1 を受ける。その結果区間1での S_0 の蓄えられる弾性エネルギーは

$$E_s = \frac{S_0}{2K} T_1^2 \quad (12)$$

4.2 実際の墜落高さ

まず張力なしで墜落するHと区間1のもとの自然長 $L_{1,0}$ が T_1 によって伸びた分、確保者側からの区間2から伸びて流入した分、さらに制動確保で手元から流出した自然長 S_0 とそれらが T_1 を受けて伸びた分の合計が実際の墜落高さになる。ただし、前述同様にカラビナに巻き付き部分とその伸びは十分小さいと考え無視する。

区間1の自然長 $L_{1,0}$ が T_1 によって伸びた分 x_1 は

$$x_1 = \frac{L_{1,0}}{K} T_1 \quad (13)$$

次に区間2で伸びたために区間2から追い出された長さ（自然長）は $x_2 = L_2 - L_{2,0} = L_2 T_2 / (K + T_2)$ である。したがって、この x_2 が T_1 を受けて伸びる $\Delta x_{2,1}$ と合わせたものが、伸びによって区間2から区間1に流入した長さである。

$$x_{2,1} = x_2 + \Delta x_{2,1} = (L_2 - L_{2,0}) \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) = \frac{L_2 T_2}{K + T_2} \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) \quad (14)$$

次に制動確保をして、手元から自然長 S_0 のロープが流入してきたら、途中の区間ではたるまないように各張力を受けて伝達され、結局は墜落者の区間1にやって来て、 T_1 を受ける。その結果区間1での S_0 の長さは $S_{0,1}$ となる。

$$S_{0,1} = S_0 \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) \quad (15)$$

以上を合計すると実際に墜落する高さは次のようになる。

$$H + \frac{L_{1,0}}{K} T_1 + \frac{L_2 T_2}{K + T_2} \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) + S_0 \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) \quad (16)$$

これと墜落者の重量 W との積がこの場合の墜落者の位置エネルギー（墜落者のエネルギー総資産または総収入）である。

$$E_{climber} = W \left\{ H + \left(\frac{L_2 T_2}{K + T_2} + S_0 \right) \left(1 + \frac{T_1}{K} \right) + \frac{L_{1,0}}{K} T_1 \right\} \quad (17)$$

もしカラビナの摩擦がなければ、 $T_1 = T_2$ なので、その張力を $T_1 = T_2 = T$ とにおいて式(17)は

$$E_{climber} = W \left\{ H + \frac{(L_2 + L_{1,0} + S_0)T}{K} + S_0 \right\} \quad (18)$$

式(18)の $L_2 + L_{1,0} + S_0$ は停止時点でのロープの全長（自然長）で、第2項はその全長に対する伸びである。

4.3 制動で流出するロープとカラビナとの間の摩擦仕事

墜落した人に結束してあるロープが、支点でのカラビナあるいは手元の確保器具、肩絡みの場合にはボディに巻き付いている。それぞれの摩擦係数は一定の状態で制動確保によってロープが擦ったとする。ここでの摩擦仕事は摩擦力と滑り距離の積であるが、擦っている場所によって摩擦力が分布したり、滑り距離が変化するので、少し注意がいる。

もともと張力の掛らない状態で測って S_0 （自然長）であるが、それぞれの区間で張力に応じて伸びたものが滑り距離になる。区間2と支点1（カラビナ）との境界では張力 T_2 なので、そこでの滑り距離は $S_0(1 + T_2/K)$ であり、支点1（カラビナ）から区間1に移る出口境界での滑り距離 $S_0(1 + T_1/K)$ 、途中滑り距離 $S(\theta)$ は出口からの巻き付け角 θ とすれば、

$$S(\theta) = S_0 \left(1 + \frac{T_1 e^{-\mu\theta}}{K} \right) \quad (19)$$

巻き付いているロープは張力 T でカラビナに押し付けられる垂直成分のため摩擦力が発生する。単位面積当たりの摩擦力を τ 、カラビナの直径を $2r$ とすると、ある θ の位置での微小面積 $rd\theta$ に作用する摩擦力は $\tau rd\theta$ である。張力とのつり合い式から、

$$\begin{aligned} \tau(\theta) &= \frac{df(\theta)}{rd\theta} = \frac{-dT}{rd\theta} = \frac{\mu T_1 e^{-\mu\theta} d\theta}{rd\theta} = \frac{\mu T_1 e^{-\mu\theta}}{r} \\ \tau(\theta) rd\theta &= \mu T_1 e^{-\mu\theta} d\theta \end{aligned} \quad (20)$$

つまり制動によって流出するロープと支点（カラビナ）との間の摩擦仕事は式(15)のようになる。摩擦係数はどの程度の範囲で場面ごとにどの程度になるかを知っておく必要がある。

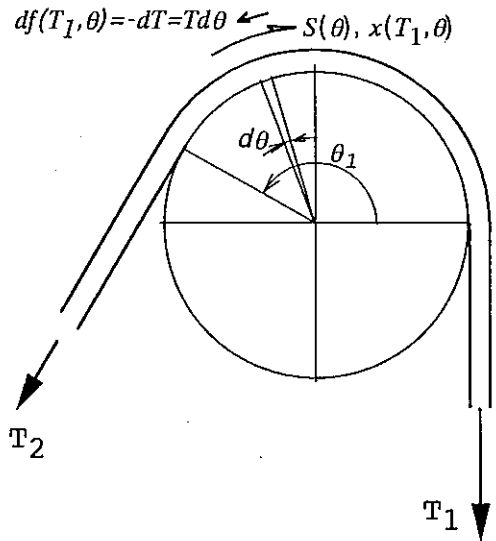


図6 カラビナなどへのロープの巻き付け

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_1} S(\theta) \tau(\theta) rd\theta &= \int_0^{\theta_1} S_0 \left(1 + \frac{T_1 e^{-\mu\theta}}{K} \right) \mu T_1 e^{-\mu\theta} d\theta \\ &= S_0 \left\{ T_1 (1 - e^{-\mu\theta_1}) + \frac{T_1^2}{2K} (1 - e^{-2\mu\theta_1}) \right\} \\ &= S_0 T_1 (1 - C_1) \left\{ 1 + \frac{T_1}{2K} (1 + C_1) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

4.4 ロープが伸びることでカラビナとの間で生じる摩擦仕事

前述の4.3のように目に見えてロープが流れて擦っている場合の摩擦仕事は分かりやすい。しかし、固定確保においても、張力によってロープは弾性伸びの分だけカラビナの表面で摩擦に逆らって移動する。前節では巻き付け位置によって張力や滑り距離が分布して一様でない場合であったが、ある場所さえ決めて考えれば、そこでは変化するものはない。今度は、やっかいなことに、ある場所を決めてもそこで張力がだんだん増加していき、最後、墜落区間では T_1 になるという場合である。やはり条件によらず摩擦係数は一定とする。先程と同様に単位面積当たりの摩擦力 τ に微小面積 $rd\theta$ を掛けて、その部分の摩擦力とする。 $\tau(\theta)rd\theta = \mu T_1 e^{-\mu\theta} d\theta$ 式(22)

ここでの滑り距離に当たるのは各部分のロープの伸び $x(\theta)$ である。区間2の出口(すなわちカラビナとの接触入口)を区間1の入り口(カラビナとの接触終わり)から測った角度を先ほど同様 θ_1 とする。 θ_1 での伸び $x(\theta_1) = L_2 T_2 / K$ であるが、これは前述の記号でカラビナの区間に流出していく部分の自然長 x_2 が T_2 を受けて伸びた長さに相当する。

$$x(\theta) = \frac{L_2 T_2}{K + T_2} \left(1 + \frac{T_1 e^{-\mu\theta}}{K} \right) \quad (23)$$

式(16)のように区間2では自然長 x_2 に張力 $T(\theta)$ で伸びた長さを滑り距離と考える。確かに元 θ_1 にあったロープは T_2 になるまでにポイント θ_1 点では $L_2 T_2 / K$ だけ伸びながらその部分を擦る。区間2の伸びとカラビナとの摩擦仕事は

$$E_{ef} = \int_0^{\theta_1} \int_0^{x_1} \tau(T_1, \theta) rd\theta dx(T_1, \theta) = \int_0^{\theta_1} \int_0^{T_1} \tau(T_1, \theta) rd\theta \frac{dx}{dT_1} dT_1 \quad (24)$$

ここで $dx = \frac{L_2 C_1 K}{(K + C_1 T_1)^2} dT_1 + \frac{L_2 e^{-\mu\theta}}{K} \left(1 - \frac{K^2}{(K + C_1 T_1)^2} \right) dT_1$ であるから

$$E_{ef} = \int_0^{\theta_1} (\mu L_2 K e^{-\mu\theta} \int_0^{T_1} \frac{C_1 T}{(K + C_1 T_1)^2} dT_1) d\theta + \int_0^{\theta_1} \frac{\mu L_2 e^{-2\mu\theta}}{K} \left(\int_0^{T_1} \left(T_1 - \frac{K^2 T_1}{(K + C_1 T_1)^2} \right) dT_1 \right) d\theta$$

$$\begin{aligned} E_{ef} &= \frac{(1 - C_1) L_2 K}{C_1} A_1 + \frac{(1 - C_1^2) L_2}{2K} \left(\frac{1}{2} T_1^2 - \frac{K^2}{C_1^2} A_1 \right) \\ &= \frac{(1 - C_1) L_2}{C_1} \left\{ -\frac{(1 - C_1) K A_1}{C_1^2} + \frac{(1 + C_1) T_1^2}{2K} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{ここで, } C_1 = e^{-\mu\theta_1}, \quad A_1 = -\frac{C_1 T_1}{K + C_1 T_1} + \log \left| \frac{K + C_1 T_1}{K} \right| \quad (26)$$

以上の E_{ef} がロープが伸びる時にカラビナ(あるいは確保器具)とロープ伸びとの間の摩擦仕事である。

5. トップの墜落を止める（中間支点がある場合）

ここでは前節で考えた基本収支を最低限二つの支点がある図7のような状況に適用し、確保システムとして構成する。支点1は墜落者が最後に設置したもの、支点2は確保の方向決め用のアンカー（directional anchor）である。特にチョック類はロープに張力が発生して一直線に張ったときに抜けやすいので、実際にも図7のようになる。支点2と確保器の間は区間3とし、確保器と確保者がロープを保持する間のロープ長はほとんどないとした。各支点への巻き付け角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ そこでの摩擦係数 μ は全て同じとした。

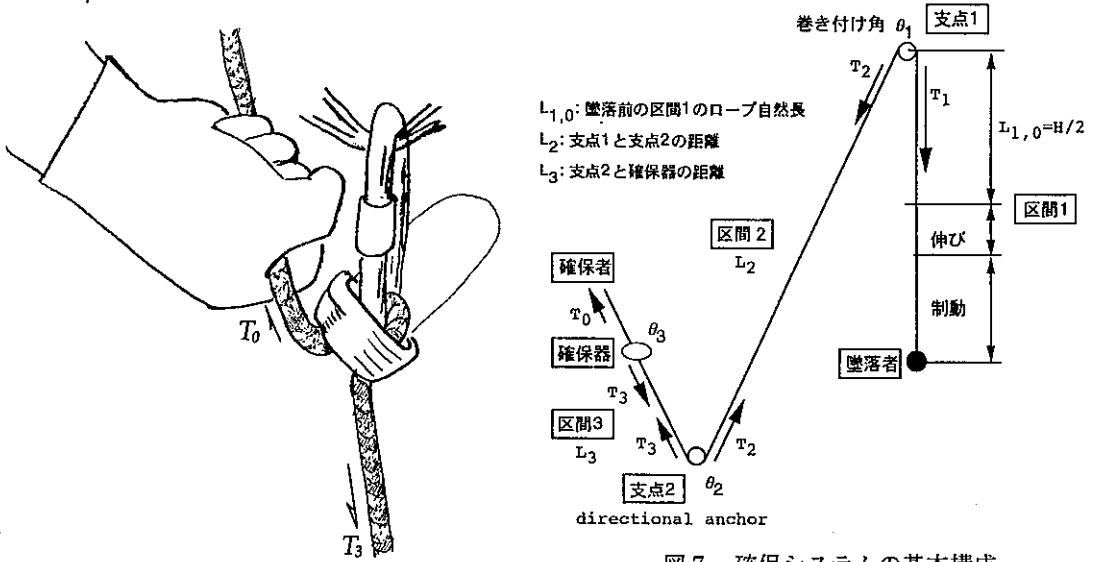


図7 確保システムの基本構成

まず、墜落者の位置エネルギー（エネルギー収入）は、張力なしの墜落してくる高さ H 、ロープの伸び分、区間1に制動で流入してきた分から求められる。確保者と確保器具との間は長さ0とできるので、そこでの伸び分は考えなくてもよい。

区間3の伸びは式(14)と同様に

$$x_3 = (L_3 - L_{3,0}) \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) = \frac{L_3 T_3}{K + T_3}$$

式(16)にこれも加えて、墜落者のもつ位置エネルギー（エネルギー収入）の合計は

$$E_{climber} = W \left\{ H + \left(\frac{L_3 T_3}{K + T_3} + \frac{L_2 T_2}{K + T_2} + S_0 \right) \left(1 + \frac{T_1}{K}\right) + \frac{L_{1,0} T_1}{K} \right\} \quad (27)$$

次に制動による各カラビナ（または確保器具）とロープとの摩擦仕事を合計する。支点1で E_{f1} 、支点2で E_{f2} 、確保器具で E_{f3} 、手で E_{f0} とする。それぞれ式(15)の考えで式(28.1)～(28.3)になり、手元での摩擦仕事 E_{f0} は式(28.4)になる。

$$E_{f1} = S_0 T_1 (1 - C_1) \left\{ 1 + \frac{T_1}{2K} (1 + C_1) \right\} \quad (28.1)$$

$$E_{f2} = S_0 T_2 (1 - C_2) \left\{ 1 + \frac{T_2}{2K} (1 + C_2) \right\} \quad (28.2)$$

$$E_{f3} = S_0 T_3 (1 - C_3) \left\{ 1 + \frac{T_3}{2K} (1 + C_3) \right\} \quad (28.3)$$

ただし, $C_1 = e^{-\mu\theta_1}$, $C_2 = e^{-\mu\theta_2}$, $C_3 = e^{-\mu\theta_3}$

$$E_{f0} = S_0 \left(1 + \frac{T_0}{K} \right) T_0 \quad (28.4)$$

次に, 各区間の張力によって伸びたロープとカラビナ (または確保器) との摩擦仕事を挙げていく。 支点 1 における伸びとカラビナの摩擦仕事 E_{ef1} , 支点 2 における伸びとカラビナの摩擦仕事 E_{ef2} , 伸びと確保器との摩擦仕事 E_{ef0} とすると

$$E_{ef1} = \frac{(1 - C_1)L_2}{2} \left\{ -\frac{(1 - C_1)KA_1}{C_1^2} + \frac{(1 + C_1)T_1^2}{2K} \right\} \quad (29.1)$$

$$E_{ef2} = \frac{(1 - C_2)L_3}{2} \left\{ -\frac{(1 - C_2)KA_2}{C_2^2} + \frac{(1 + C_2)T_2^2}{2K} \right\} \quad (29.2)$$

$$E_{ef0} = \frac{(1 - C_3)L_0}{2} \left\{ -\frac{(1 - C_3)KA_3}{C_3^2} + \frac{(1 + C_3)T_3^2}{2K} \right\} = 0 \quad (29.3)$$

ただし,

$$A_1 = -\frac{C_1 T_1}{K + C_1 T_1} + \log \left| \frac{K + C_1 T_1}{K} \right|$$

$$A_2 = -\frac{C_2 T_2}{K + C_2 T_2} + \log \left| \frac{K + C_2 T_2}{K} \right|$$

$$A_3 = -\frac{C_3 T_3}{K + C_3 T_3} + \log \left| \frac{K + C_3 T_3}{K} \right|$$

式(29.3)では手と確保器との距離 L_0 はロープ長に比べて無視できるくらい小さいので, ほぼ 0 と見なしてよからう。

ロープの伸びによる弾性エネルギーについては, 先と同様に手と確保器の間では無視してもよいと考えられる。区間 3にあるロープの伸びによる弾性エネルギー E_{e3} は式(8)と同様に考え, 添え字を変更するだけである。区間 2にあるロープの伸びによる弾性エネルギー E_{e2} は式(8)そのものである。

$$E_{e3} = \int T_3 dx_3 = L_3 K \left\{ -\frac{T_3}{K + T_3} + \log \left| \frac{K + T_3}{K} \right| \right\} \quad (29.1)$$

$$E_{e2} = L_2 K \left\{ -\frac{T_2}{K + T_2} + \log \left| \frac{K + T_2}{K} \right| \right\} \quad (29.2)$$

区間 1での弾性エネルギーは, 区間 1 の墜落直前の自然長 $L_{1,0}$ が張力 T_1 を受けて伸びる弾性エネルギー $E_{e1,1}$, 区間 2 および区間 3 から流入した自然長が蓄えるエネルギー $E_{e2,1}$ および $E_{e3,1}$ それに加えて手元から自然長で S_0 流出した長さに対する弾性エネルギーを合計する。

$$E_{e1,1} = \frac{L_{1,0}}{2K} T_1^2 \quad (29.3)$$

$$E_{e2,1} = \frac{L_2}{2K} T_1^2 + \frac{L_2 K T_1}{C_1(K+C_1 T_1)} - \frac{L_2 K}{C_1^2} \log \left| \frac{K+C_1 T_1}{K} \right| \quad (29.4)$$

$$E_{e3,1} = \frac{L_3}{2K} T_1^2 + \frac{L_3 K T_1}{C_1 C_2 (K+C_1 C_2 T_1)} - \frac{L_3 K}{C_1^2 C_2^2} \log \left| \frac{K+C_1 C_2 T_1}{K} \right| \quad (29.5)$$

$$E_{eS} = \frac{S_0}{2K} T_1^2 \quad (29.6)$$

以上のエネルギー収支が合うとき、墜落者の速度が0になり停止する。また、各区間の張力の関係はそれぞれの巻き付け角と摩擦係数に対して次のような関係になっている。

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 e^{-\mu\theta_1} = T_1 C_1 \\ T_3 &= T_2 e^{-\mu\theta_2} = T_2 C_2 = T_1 C_1 C_2 \\ T_0 &= T_3 e^{-\mu\theta_3} = T_3 C_3 = T_1 C_1 C_2 C_3 \end{aligned} \quad (30)$$

これらの張力の関係から、墜落者にかかる張力 T_1 と手元から流出したロープ長（自然長） S_0 を未知数として求める関係式ができる。あるいは(24)の式を使って、 T_0 と S_0 の式に書き換えて、確保者が最大限の努力で発揮した力 T_0 が片手で例えば15kgfと決まってしまうならば、それに対するロープ長（自然長） S_0 を求め、実際に落下する高さから地面まで落ちてしまうかどうか判定したり、(30)から各区間での張力も決まるので、支点に掛る力は後述の式(29)で求められる。

ここでは、墜落者への張力 T_1 と手元からの流出ロープ長（自然長） S_0 を未知数とする関係式を示す。

$$E_{climber} = (E_{f1} + E_{f2} + E_{f3} + E_{f0}) + (E_{ef1} + E_{ef2} + E_{ef0}) + (E_{e3} + E_{e2} + E_{e1} + E_{eS}) \quad (31)$$

左辺は位置エネルギー、右辺第1括弧は制動による流出ロープの摩擦仕事、第2括弧は伸びとカラビナなどとの摩擦仕事、第3括弧は弾性仕事である。それぞれの式を式(30)と $A_1 \sim A_3$ にも注意して T_1 と S_0 を未知数とする関係式にすれば、一部は繰返しになるが、まとめて、以下のようになる。

$$E_{climber} = -W \left\{ H + \left(\frac{C_1 C_2 L_3 T_1}{K + C_1 C_2 T_1} + \frac{C_1 L_2 T_1}{K + C_1 T_1} + S_0 \right) \left(1 + \frac{T_1}{K} \right) + \frac{L_{1,0} T_1}{K} \right\}$$

$$E_{f1} = S_0 (1 - C_1) \left\{ 1 + \frac{T_1}{2K} (1 + C_1) \right\} T_1$$

$$E_{f2} = S_0 C_1 (1 - C_2) \left\{ 1 + \frac{C_1 (1 + C_2)}{2K} T_1 \right\} T_1$$

$$E_{f3} = S_0 C_1 C_2 (1 - C_3) \left\{ 1 + \frac{C_1 C_2 (1 + C_3)}{2K} T_1 \right\} T_1$$

$$E_{f0} = S_0 \left(1 + \frac{C_1 C_2 C_3 T_1}{K} \right) C_1 C_2 C_3 T_1$$

$$E_{ef1} = \frac{(1 - C_1) L_2}{2} \left\{ -\frac{(1 - C_1) K}{C_1^2} \left(-\frac{C_1 T_1}{K + C_1 T_1} + \log \left| \frac{K + C_1 T_1}{K} \right| \right) + \frac{(1 + C_1) T_1^2}{2K} \right\}$$

$$E_{ef2} = \frac{(1 - C_2) L_3}{2} \left\{ -\frac{(1 - C_2) K}{C_2^2} \left(-\frac{C_1 C_2 T_1}{K + C_1 C_2 T_1} + \log \left| \frac{K + C_1 C_2 T_1}{K} \right| \right) + \frac{(1 + C_2) C_1^2}{2K} T_1^2 \right\}$$

$$E_{ef0} = \frac{(1-C_3)L_0}{2} \left\{ -\frac{(1-C_3)K}{C_3^2} \left(-\frac{C_1C_2C_3T_1}{K+C_1C_2C_3T_1} + \log \left| \frac{K+C_1C_2C_3T_1}{K} \right| \right) + \frac{(1+C_3)G_1^2C_2^2T_1^2}{2K} \right\}$$

$$E_{e3} = L_3K \left\{ -\frac{C_1C_2T_1}{K+C_1C_2T_1} + \log \left| \frac{K+C_1C_2T_1}{K} \right| \right\}$$

$$E_{e2} = L_2K \left\{ -\frac{C_1T_1}{K+C_1T_1} + \log \left| \frac{K+C_1T_1}{K} \right| \right\}$$

$$E_{e1} = E_{e1,1} + E_{e2,1} + E_{e3,1}$$

$$= \frac{L_{1,0}}{2K} T_1^2 + \frac{L_2}{2K} T_1^2 + \frac{L_2KT_1}{C_1(K+C_1T_1)} - \frac{L_2K}{C_1^2} \log \left| \frac{K+C_1T_1}{K} \right| \\ + \frac{L_3}{2K} T_1^2 + \frac{L_3KT_1}{C_1C_2(K+C_1C_2T_1)} - \frac{L_3K}{C_1^2C_2^2} \log \left| \frac{K+C_1C_2T_1}{K} \right|$$

$$E_{es} = \frac{S_0}{2K} T_1^2$$

以上を先ほどの式(31)の形にまとめ、Excelなどの表計算ソフトに付属の数値解析メニューなどが利用でき、プログラムを組まなくても比較的容易に解が求まる。図8は試算結果である。丸い数字で試算するとして、墜落者の重量60kgf、ロープ係数 $K=1000$ kgf、 $\mu=0.2$ 、巻き付け角は支点1と支点2では同じ150度(=2.62rad)、確保器具には360度(=6.28rad)、 $L_{1,0}=3$ m、 $L_2=10$ m、 $L_3=1.5$ mとし、簡単のために L_0 だけは0とする。係数 $C_1=C_2=0.592$ 、 $C_3=0.285$ 仮に固定確保で摩擦がなければ、落下率 $H/L=2$ $L_{1,0}/(L_{1,0}+L_2+L_3)=0.41$ という条件である。

もし、カラビナとロープとの間の摩擦係数がないと考えれば $C_1=C_2=C_3=1$ $T_1=T_2=T_3$ (ここでは T とする。)

$$W \left\{ H + \frac{(L_{1,0}+L_2+L_3+S_0)T}{K} + S_0 \right\} = \frac{1}{2K} (L_{1,0}+L_2+L_3+S_0) T^2 + S_0 \left(1 + \frac{T}{K} \right) T \quad (33)$$

ここで $L_{1,0}+L_2+L_3=L_0$ (流出以前のロープ自然長) とすれば、(1)修正したWexlerの式になり、 T を求めれば、

$$W \left\{ H + \frac{(L_0+S_0)T}{K} + S_0 \right\} = \frac{1}{2K} (L_0+S_0) T^2 + S_0 \left(1 + \frac{T}{K} \right) T$$

$$T = W \left\{ \frac{L_0+S_0(1-\frac{K}{W})}{L_0+3S_0} \right\} + W \sqrt{\frac{W^2(L_0+S_0)^2 + S_0^2K^2 + 2WK\{(L_0+S_0)H + 2(H+S_0)S_0\}}{(L_0+3S_0)^2W^2}} \quad (34)$$

最後に支点に掛る力の大きさと方向を求める。支点1に掛る力は張力 T_1 重力で真下方向であり、張力 T_2 は巻き付け角 θ_1 の位置で接線方向に引張る。力の三角形から T_1 と T_2 の合力 T_{12} が支点1に掛るとすれば余弦定理より、 $T_{12} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2\cos\theta_1}$ (35) 仮に巻き付け角が180°の場合には $T_{12}=T_1+T_2$ になる。合力の方向は真下方向から T_2 の方向へ(90°- $\theta_1/2$)度だけ斜めの方向になる。図8で想定した条件の場合には、Wexlerの従来の式の結果であっても大差ない値を示した。しかし、もともと明確な判断のもとに近似されていないので、図8の想定

以外でも常にこのように一致するものと考えてはいけない。特に理論的な取り扱い上は十分に注意する必要がある。

6. おわりに

Wexlerが基本となる見通しをよくするために、まず摩擦のない場合を解析したと思われる。次に当然、摩擦を考慮した計算をするというのは誰もが思いつく順序である。したがって、先人の多くも初心として辿ったと思われるが、それらの文献をよく把握していないという不勉強についてお詫し願いたい。また、すでに解析されているとしたら今回の無駄をお笑いださきたい。しかし、今後の考え方の基礎として導出も含めて残しておく意味はあると考えた。そのため、式の羅列になってそれらの物理的意味の吟味まで至らなかった。

また、実際の状況と参照し、今回提示した理論式が使えるかどうか評価するためには、測定可能な条件 K , S_0 , μ などの資料も不足している。ロープ係数 K をより厳密に扱うことが良いに決まっているがさらに煩雑になる。ある墜落程度に対して相当する値を取ると考えることで、今回のような K ＝一定でも実用上十分であるかもしれない。あるいは幅広い条件について数値を比較したり、理論上の各項の大きさを評価すれば、事実上無視して差し支えない部分を選別でき、解析的に解が求められるような実用的な近似も可能かもしれない。いずれにせよWexlerが示した式は大きな値を押えていることは間違いなく、その意味は色あせることはなく、意義のあることにも変わりはない。

参考文献

- 1) "The Theory of Belaying", Arnold Wexler, 1950, American Alpine Journal, The American Alpine Club, pp.379-405.
- 2) 「コンティニューアスクライミングにおける確保について」松本憲親, 鈴木 漠, 柳沢昭夫, 渡邊雄二, 宮崎 豊, 藤原 洋, 佐伯正雪, 谷村英一, 平成10年3月31日, 登山研修Vol.13-1998, 文部省登山研修所, pp.33-42.
- 3) 「確保技術 確保理論」柳沢昭夫, 平成11年3月31日, 登山研修Vol.14-1999, 文部省登山研修所, pp.98-109.

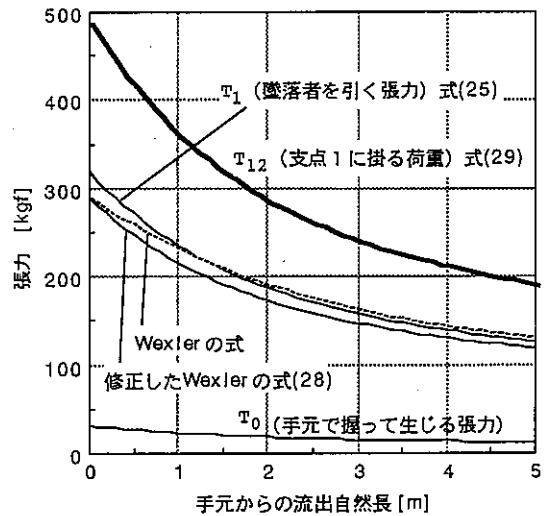


図8 制動確保における張力, 支点にかかる力の計算値

(図7において $L_{1,0} = 3\text{ m}$, $H = 6\text{ m}$, $L_2 = 10\text{ m}$, $L_3 = 1.5\text{ m}$, $K = 1000\text{ kgf}$, $\mu = 0.2$, $\theta_1 = \theta_2 = 150^\circ$, $\theta_3 = 360^\circ$)